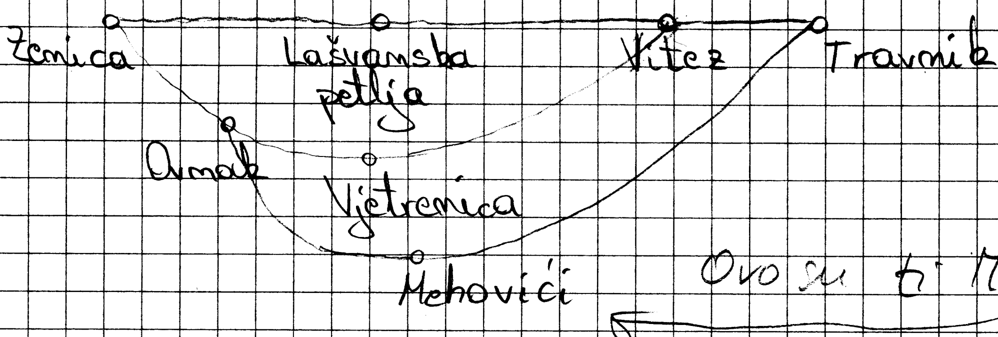
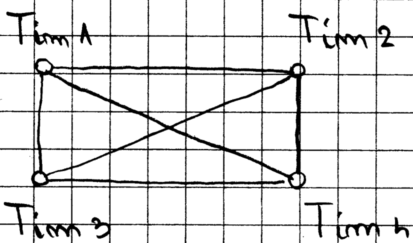
PRIMJER GRAFOVA:

1. Modelirati grafom puteve na relaciji Zenica-Travnik.



Ovo su ti Mehurići
Anela

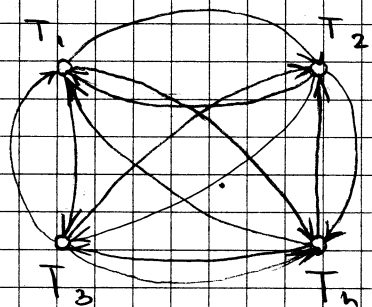
2. Turnir četiri tima svaki sa svakim igra jednu utakmicu.



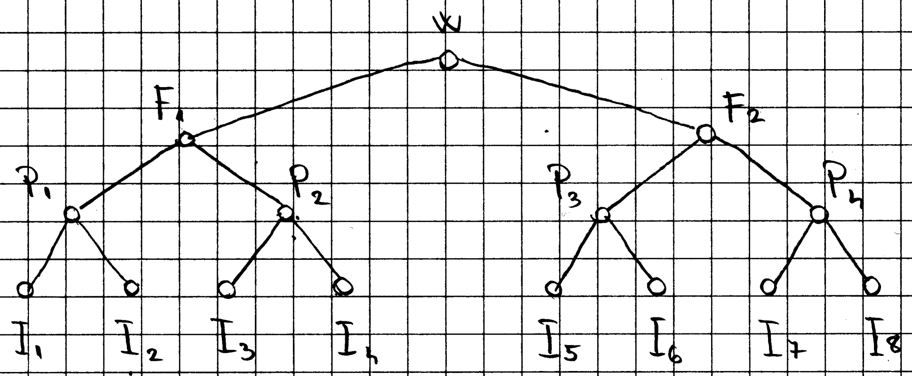
Graf čine grane i čvorovi.

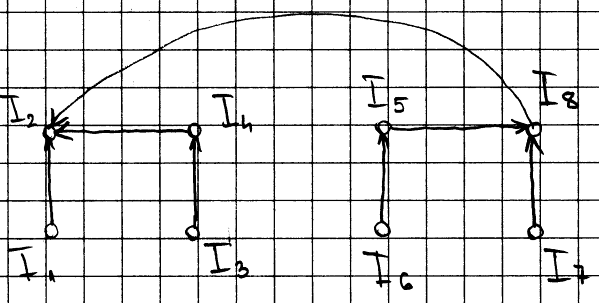
Usmjereni graf je onaj koji ima strelice na kraju.

3. Turnir 4 tima, svaki sa svakim igra na svom terenu.



4. Teniski turnir igra 8 igrača.





* Definicija grafa:

Graf G je uređena trojka sastavljena od skupa čvorova V(G), skupa grana E(G) i relacije koja svakoj grani pridružuje 2 čvora (koje ne moraju biti različita) koje nazivamo njenim krajnjim tačkama.

Trivijalni grafovi su grafovi sa $\emptyset$ ili 1 čvorom.

Petlja je grana čije su krajnje tačke iste.

grana

$$\left(\{\},\ \{\},\ \{(\ ,\ ),\ (\ ,\ )\}\right)$$

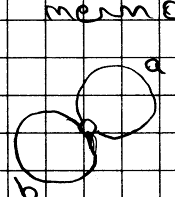
dva čvora

V(G) E(G)

5. Naći najmanji broj čvorova koji se uvijek sijeku u tački koja nije čvor.

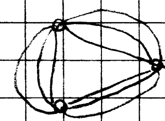
$\emptyset$ čvorova nema grana

1 čvor petlja (refleksivnost)

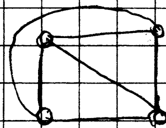


2 čvora

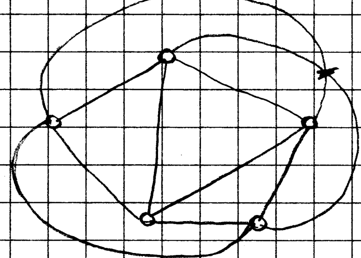
3 čvora



4 čvora



5 čvorova



Ovaj graf nije planaran (ravanski- jer ga ne možemo nacrtati u ravni bez presjeka)

Multigrane su skup grana koje imaju iste krajnje tačke.

Jednostavan graf je graf bez petlji i multigrane.

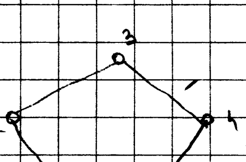
Jednostavan graf se definiše skupom čvorova i grana određujući grane kao neuređen par čvorova i pišući $e = uv$ za jednu granu e sa krajnjim tačkama u i v. Ukoliko su u i v krajnje tačke jedne grane onda ih nazivamo **susjednim čvorovima**.

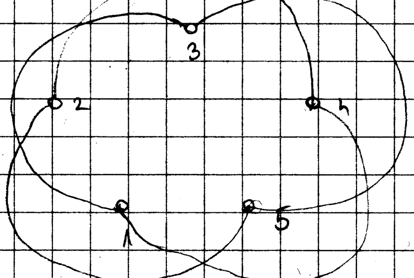
Za grane e i f kažemo da su **susjedne grane** ako postoji čvor koji je zajednički za te dvije grane.

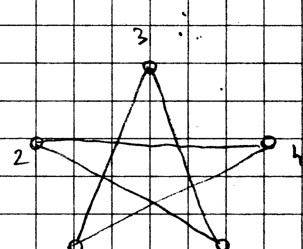
Komplement ($\bar{G}$) jednostavnog grafa G je jednostavan graf sa skupom čvorova $V(G)$ i skupom grana $E(G)$ tako da je $uv \in E(\bar{G}) \Leftrightarrow uv \notin E(G)$ isti čvorovi različite grane

ima sve grane koje nema G.

6. Dat je graf C_5. Odrediti $\bar{C}_5$.







7. Nacrtati graf $G = (V(G), E(G), \Psi_G)$ gdje je:

$V(G) = \{v_1, v_2, \dots v_5\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, \dots e_8\}$

i Ψ je definisano sa:

$\Psi_G(e_1) = v_1 v_2$

$\Psi_G(e_2) = v_2 v_3$

$\Psi_G(e_3) = v_3 v_3$

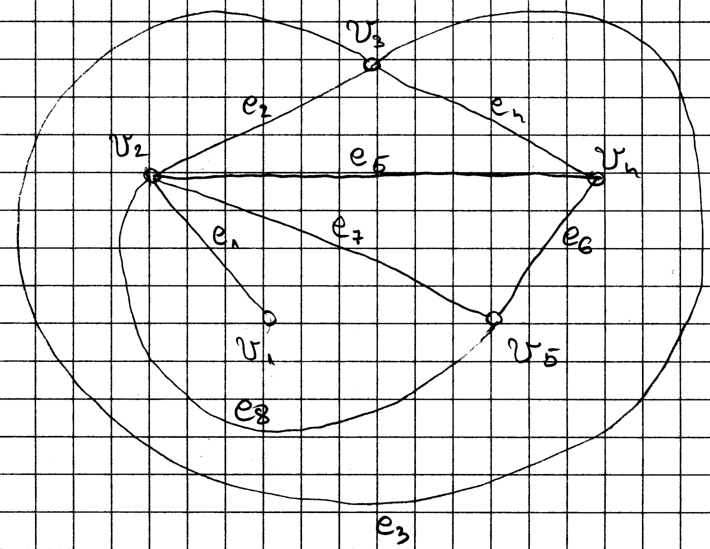
$\Psi_G(e_4) = v_3 v_4$

$\Psi_G(e_5) = v_2 v_4$

$\Psi_G(e_6) = v_4 v_5$

$\Psi_G(e_7) = v_2 v_5$

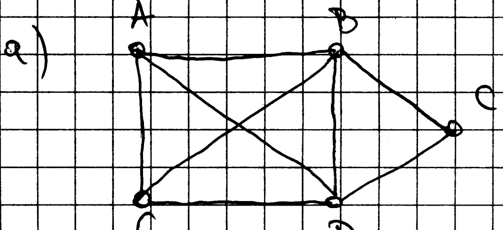
$\Psi_G(e_8) = v_2 v_5$



- Klikom grafa nazivamo skup uzajamnih čvorova.
Nezavisan skup grafa je skup čvorova koji su uzajamno nesusjedni.

8. Odrediti max klik i max nezavisan skup datih grafova.

a)

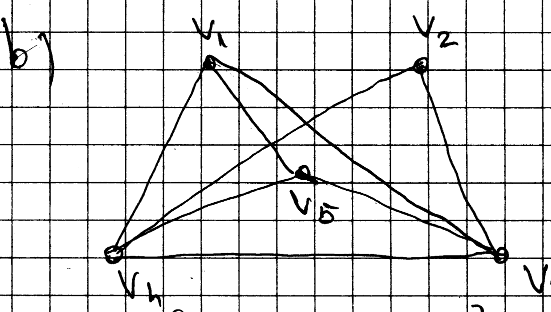


$\{A, B, D, E\}$ max klika

$\{A, C\}$ max nezavisan skup

$\{E, C\}$ — || —

b)

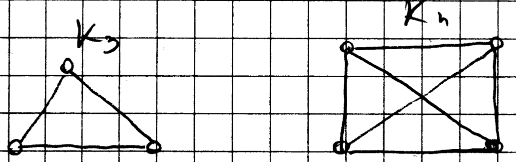


$\{V_1, V_3, V_4, V_5\}$ maksimalna klika

$\{V_1, V_2\}$ max nez. skup

Jednostavan graf K_n kod kojeg je $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i kod kojeg su svaka 2 čvora susjedna naziva se ~~komplementaran~~ kompletan graf sa n čvorova.

9. Nacrtati K_3 i K_4.



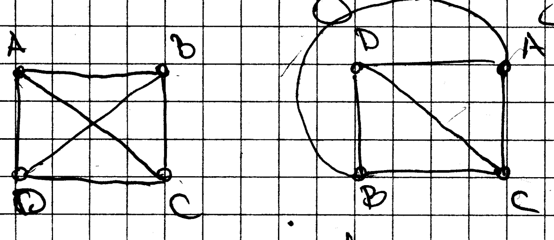
10. Koliko grana ima K_n?

1 sa $n-1$

$\boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$ zbog ponavljanja ide kroz 2

Izomorfizam jednostavnog grafa G na jednostavni graf H jeste bijekcija $f: V(G) \to V(H)$ tako da je $uv \in E(G) \iff f(u)f(v) \in E(H)$ kažemo da je G izomorfno sa H ako postoji izomorfizam sa G na H.

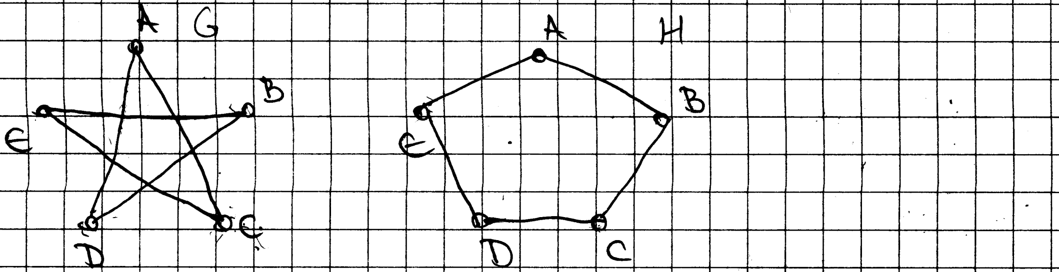
11. Da li su sljedeći grafovi izomorfni?



svakom od članova 1 skupa moramo pridružiti jedan iz drugog skupa - bijekcija

$\{(A,A),(B,B),(C,C),(D,D)\}$

12. Da li su slijedeći grafovi izomorfni?



$f = \{(A,A),(B,C),(C,E),(D,B),(E,D)\}$

$E(G) = \{AC, CE, EB, BD, DA\}$

$E(H) = \{AB, BC, CD, DE, EA\}$

$AC \in E(G) \Leftrightarrow f(A)f(C) \in E(H)$?

$AE \in E(H)$ ✓

$CE \in E(G) \Leftrightarrow f(C)f(E) = ED \in E(H)$

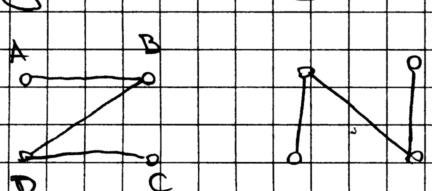
$EB \in E(G) \Leftrightarrow DC \in E(H)$

$BD \in E(G) \Leftrightarrow CB \in E(H)$

$DA \in E(G) \Leftrightarrow BA \in E(H)$

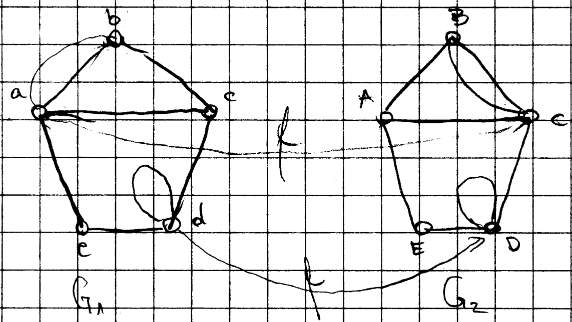
Graf je **samokomplementaran** ako je izomorfan svom komplementu.

13. Pronaći samokomplementarni graf sa najmanjim brojem čvorova.



K_4 ima broj grana 6 pa tražimo grafove sa $\frac{6}{2} = 3$ grana

14. Dokazati da sljedeći grafovi nisu izomorfni



Nisu jednostavni grafovi

(ima petlju i multigranu)

$d(a) = 4 \geq d(x)$ $\forall x \in V(G_1)$ $\Big\} = a \leftrightarrow C$

$d(C) = 4 \geq d(x)$ $\forall x \in V(G_2)$

$d \leftrightarrow D$ ali $ED \in E(G_2) \Leftrightarrow f(a)\, f(d) \in G_1$

b, c, e, A, B, E $\quad ad \notin G_1$

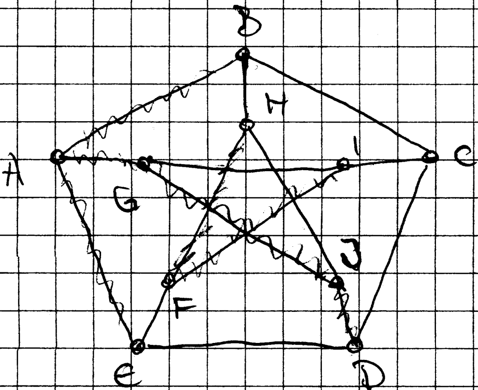
15. Postoje li samo komplementarni grafovi sa:

a) 11 čvorova $\quad E(K_{11}) = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ $\quad$ Nisu jer imaju neparan br. grana

b) 6 čvorova $\quad E(K_6) = 15$ $\quad \frac{15}{2} = 7.5$ grana

Samokomp. grafovi moraju imati jednak broj čvorova i obuhvatati uniju grana.

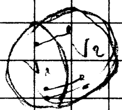
16. Naći maximalnu kliku i max nezavisan skup.



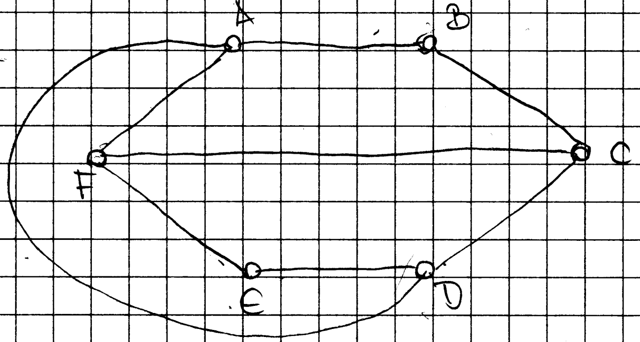
$\{A, G\}$ max klika

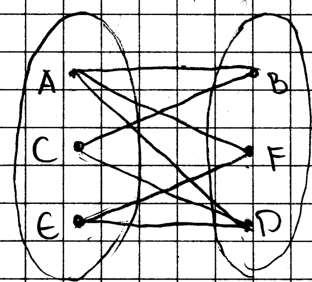
$\{A, F, J, C\}$

Def: Graf $G=(V,E)$ je **bipartitan** ako postoji razbijanje skupa V na 2 podskupa $V_1, V_2 \subseteq V$ $(V_1 \cap V_2 = \emptyset$ disjunktni, $V_1 \cup V_2 = V)$ tako da svaka grana $e \in E$ spaja 2 čvora od kojih je jedan iz skupa V_1 a drugi iz skupa V_2. Drugim riječima za svaku granu $e \in E$ vrijedi $(\forall e \in E)\ |e \cap V_1| = |e \cap V_2| = 1$



Pr. 1

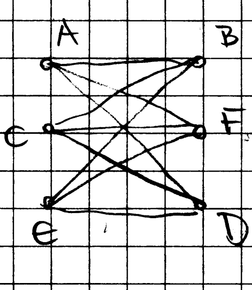




Def: **Kompletan bipartitan graf** je jednostavan bipartitan graf sa biparticijom (X,Y) u kojoj je svaki čvor iz X spojen sa svakim čvorom iz Y. Ako je br. čvorova skupa X $|X|=m$, a broj čvorova skupa Y $|Y|=n$ takav da obilježavamo $K_{m,n}$

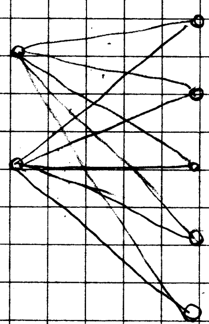
Pr. 2 Na bazi prethodnog primjera nacrtati kompletan bipartitan graf.

$K_{3,3}$:



Pr. 3: Nacrtati $K_{2,5}$:

$\mathcal{E} = 2\cdot 5 = 10$ grana



Pr. 4: Dokazati da je:

a) $\mathcal{E}(K_{m,n}) = m\cdot n$ – OČITO

b) ako je G jednostavan i bipartitan onda je

$$\mathcal{E} \leq \frac{\nu^2}{4}$$

$\nu \to$ broj čvorova

$\mathcal{E} \to$ broj grana

$\mathcal{E} < m\cdot n$ (običan bipartitan graf)

$\mathcal{E} \leq \frac{\nu^2}{4}$ $\quad$ $\nu < m+n$

$\mathcal{E} \leq \frac{\nu^2}{4}$

$\frac{\nu^2}{4} = \frac{m^2+2mn+n^2}{4} > \frac{8mn}{4}$

$\mathcal{E} < \frac{(m+n)^2}{4}$

$+\ \mathcal{E} < m\cdot n$

$m\cdot n \leq \frac{(m+n)^2}{4} \quad /\cdot 4$

$2\mathcal{E} < \frac{m^2+2mn+n^2}{4} + m\cdot n \quad /\cdot 4$

$4mn \leq m^2+2mn+n^2$

$8\mathcal{E} < m^2+2mn+n^2+4m\cdot n$

$m^2-2mn+n^2 \geq 0$

$8\mathcal{E} < m^2+6mn+n^2 \Rightarrow \frac{(m+n)^2+4mn}{8} > \mathcal{E}$

$(m-n)^2 \geq 0$

$|V_1| = m$ $\quad$ Max imamo $m(\nu-m)$ grana

$|V_2| = \nu - m$ $\quad$ $\mathcal{E}_{max}(m) = -m^2 + m\nu$

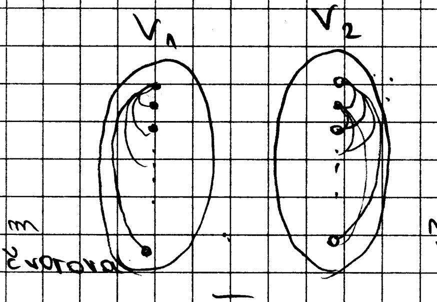
$\mathcal{E}_{max}'(m) = 0 \Rightarrow -2m+\nu = 0$

$$m = \frac{\nu}{2}$$

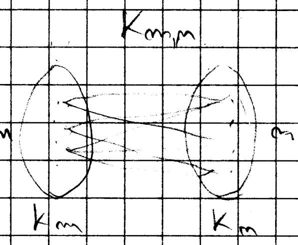
1. Opisati grafove $\overline{K}_m$ i $\overline{K}_{m,m}$

K_m - svi čvorovi su susjedni, pa u $\overline{K}_m$ ni jedan nije povezan tj.:
(kompletan graf)

graf sa m čvorova i nula grana



K_m $\overline{K}_{m,m}$ K_m

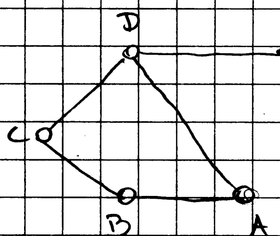


$\overline{K}_{m,m} = K_m + K_m$ graf sa dvije komponente povezanosti

Def: Graf $(H \subseteq G)$ H je **podgraf** grafa G ako $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ i $E(H) = E(G) \cap (V(H) \times V(H))$

čvorovi grane

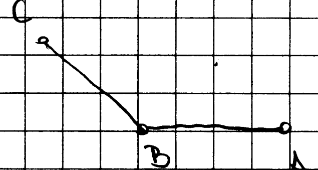
Pr:



graf G

$H \subseteq G$

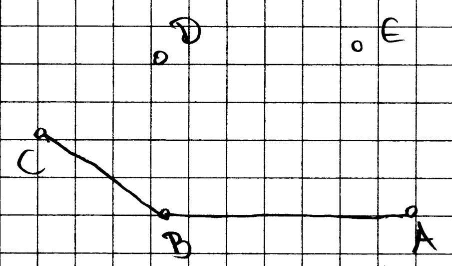
$V(H) = \{A, B, C\}$



podgraf H

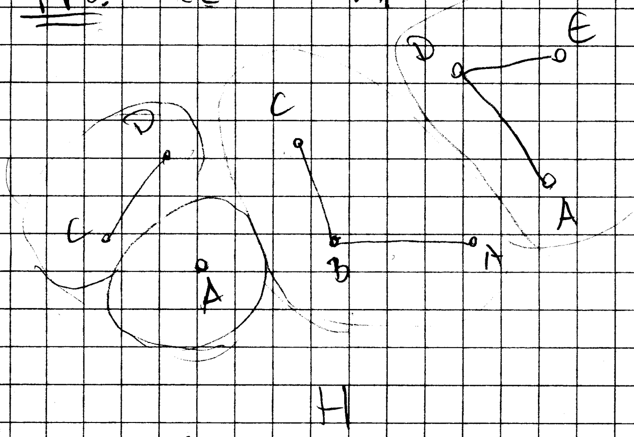
Def: **Djelimični (parcijalni) graf** grafa $G=(V,E)$ je svaki graf oblika $H=(V,T)$ pri čemu je $T \subset E$.

Pr2: H kao parcijalni graf grafa G

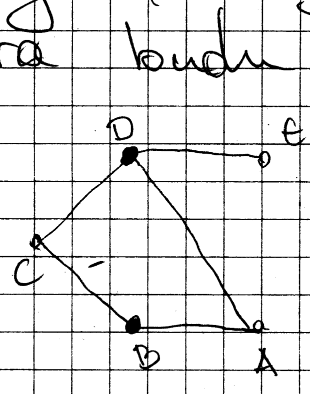


Def: **Dekompozicija grafa** je lista podgrafova tako da se svaka grana pojavljuje jednom u tačno jednom podgrafu liste.

Pr: iz Pr. 1



Def: **Hromatski broj grafa** G $\chi(G)$ je minimalan broj boja koje su potrebne da svakom čvoru dodijelimo jednu tako da svaka dva susjedna čvora budu obojena različitim bojama.

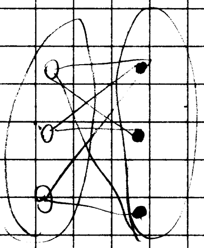


dovoljne su dvije boje

Pr 4: $\chi(K_m) = ? = m$ zato što je povezan svaki

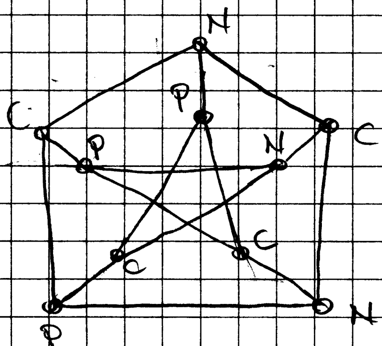
$\chi(G) = 2$ G - bipartitan graf

($\chi(G) = 2 \Rightarrow G$ je bipartitan) - suprotno ne vrijedi



(graf može biti bez grana tj. da ima samo čvorove pa ima samo jednu boju)

Pr 5: $\chi(G) = ?$



3 boje

DEF: **Put** je lista $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots v_{k-1}, e_k, v_k$ čvorova i grana tako da za $1 \le i \le k$ vrijedi da e_i ima za krajnje tačke čvorove v_{i-1} i v_i

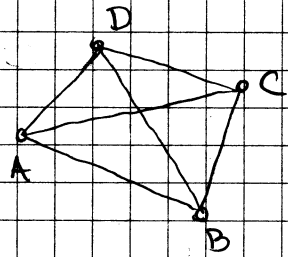
DEF **Jednostavan put** je put u kojem se ne ponavljaju grane.

DEF **Elementarni (prost) put** je put u kojem se ne ponavljaju čvorovi. Elementarni put sa n čvorova označavamo sa P_n.

uv put ima prvi čvor u, a posljednji v (u, v zovemo krajnjim tačkama puta, a sve ostale zovemo unutrašnjim tačkama puta).

Primjedba: **Svaki elementarni put je jednostavan.**

Pr.



Put: ADABCAC (put od A do C)

možemo se vraćati, i ne moramo se vratiti u početnu tačku

Jednostavan put: ADBAC

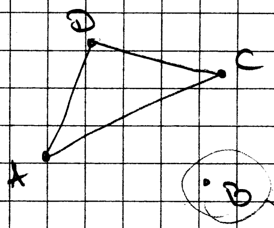
grane se ne smiju ponavljati, a čvorovi smiju

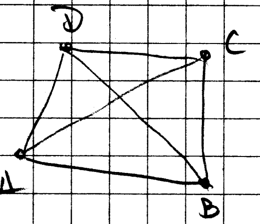
Elementarni put: ADBC

ne mogu se ponoviti ni čvorovi ni grane

DEF: **Graf G je povezan** ako svaki par čvorova grafa G pripada jednom elementarnom putu.

Pr.:





nepovezan g. povezan g.

izolovani čvor

DEF: **Stepen čvora v** u grafu G je broj incidentnih grana tog čvora (s tim što se svaka petlja broji 2 puta), obilježavamo ga sa $d_G(v)$ ili $d(v)$

$d(B) = 4$

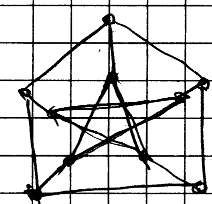
$d(F) = 1$

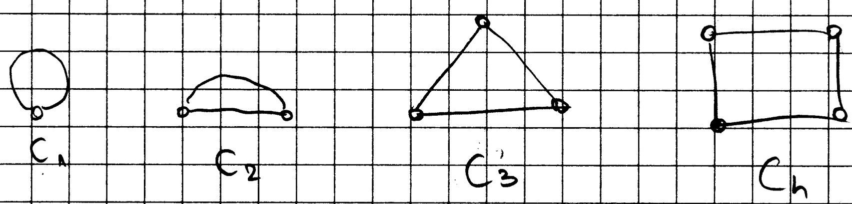
DEF: Neorijentisan graf se naziva **regularan** (pravilan, jednorodan) stepena r ako su stepeni svakog čvora jednaki r

DEF: Konačan, povezan, regularan graf stepena 2 zove se **kontura**. Konturu sa n čvorova označavamo sa C_n.

DEF: **Pojas grafa** koji posjeduje konturu je dužina njegove najkraće konture. Graf bez konture ima beskonačan pojas.

Petersonov graf ima pojas dužine 5.





DEF: **Komponenta grafa** G (ili povezana komponenta) je maximalno povezani podgraf grafa G.

Komponenta grafa G je trivijalna ako nema grana. Izolovan čvor je čvor stepena nula.

Primjedba: Komponente grafa su disjunktne.

Lema: Dodavanjem jedne grane broj komponenti se smanjuje ili za 0 ili za 1, a brisanjem jedne grane se broj komponenti povećava ili za nula ili za jedan.

Kompozicija - svaki graf sa n čvorova i k grana ima najmanje $n-k$ komponenti.

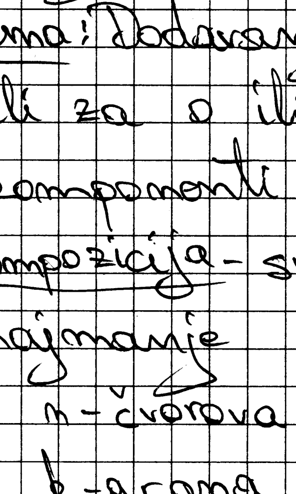
n - čvorova

k - grana

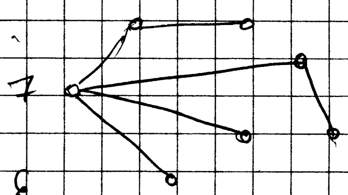
$n-k$ - komponenti

$\left.\begin{array}{l} n = \text{čvorova} \\ k = 0 \text{ grana} \end{array}\right\}$ n komponenti

$k = 1$ $\left.\begin{array}{l} n-0 \\ \text{ili} \\ n-1 \end{array}\right\}$ komponenti



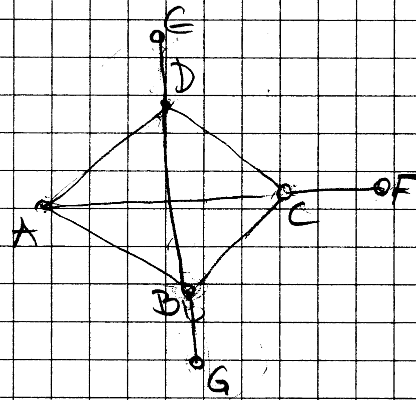
Primjedba: Dodavanjem grana koja ne čini konturu uvijek smanjujemo broj komponenti.



→ stabla

DEF: **Presječni čvor (grana)** je čvor (grana) čije brisanje povećava broj komponenti.

Presječni čvor: B, C, D
ili grana: DE, CF, BG

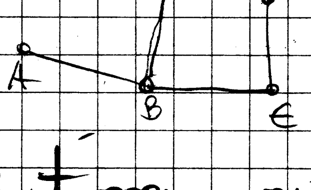


LEMA: **Grana je presječna** akko ne pripada ni jednoj konturi.

DEF: **Put** je **paran (neparan)** ako ima paran (neparan) broj grana.

PROPOZICIJA:
~~DEF~~ Svaki zatvoren neparan put sadrži jednu neparnu konturu. (PROPOZICIJA)

KENIGOV TEOREM:
Graf je bipartitan akko ~~ne~~ sadrži neparnu konturu.



A B E D C B A

DEF: **Zatvoren put** je put uv kod koga je $u=v$.

sa ispita

1. Pokazati da je barem jedan od grafova G ili $\bar{G}$ povezan. vrijedi $\Leftrightarrow$

2. Odrediti tačnost sljedećih tvrdnji:

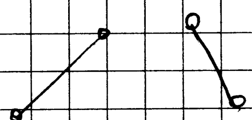
a) Svaki nepovezan graf posjeduje izolovan čvor.

b) Graf je povezan akko je neki čvor povezan sa svim ostalim čvorovima.

c) Skup grana svakog zatvorenog puta se može podijeliti na skupove grana zatvorenih jednostavnih puteva (kontura).

grane se ne ponavljaju

2. a) NE, Npr.

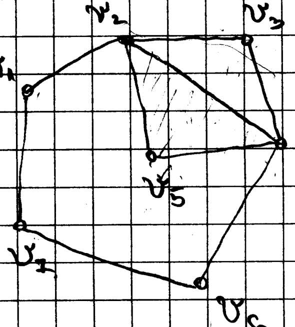


G

b) G je povezan $\overset{def}{\Rightarrow}$ svaki čvor je povezan sa svim ostalim čvorovima (dakle postoji 1)

Neka je v_1 čvor koji je povezan sa svim ostalim $\Rightarrow$ Posmatrajmo v_2 i v_3 (proizvoljni), između njih postoji put $v_2 \ldots v_1 \ldots v_3 \Rightarrow G$ je povezan

c)



$v_1 v_2 v_3 v_4 v_6 v_7 v_1$

$v_1 v_2 v_5 v_4 v_2 v_3 v_4 v_6 v_7 v_1$

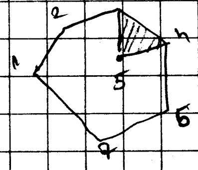
iste grane $\Rightarrow$ nije jed. put

$v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_2 v_1$

(govori se o zatvorenim putevima što je važno)

Kontura je zatvoren, povezan, regularan graf

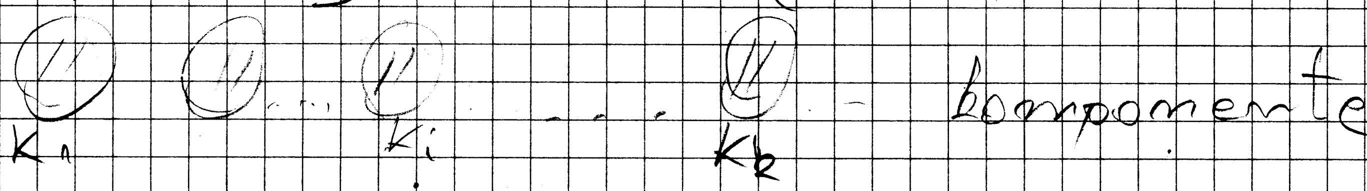
Ovaj graf nije regularan pa se ne može podijeliti na skupove grana kontura.

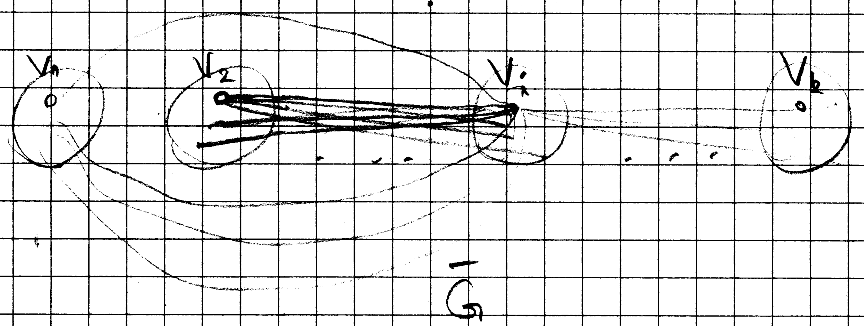


3453247643

ne može ponavljati se grane

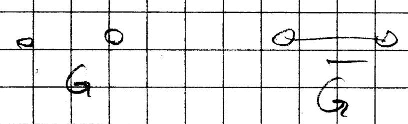
1. Pretpostavimo da G nije povezan i da ima k komponenti povezanosti. Iz svake komponente uzmimo po jedan čvor v_i $i \in \{1, \dots k\}$ pa ih posmatrajmo u komplementu.



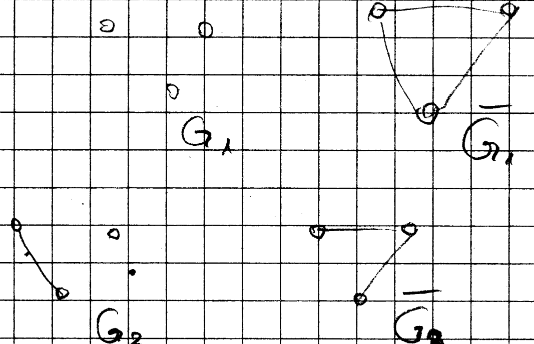


Čvor v_i je susjedan (a time i povezan) sa svim čvorovima koji nisu bili u komponenti K_i, a nije povezan sa čvorovima koji su bili u komponenti K_i.

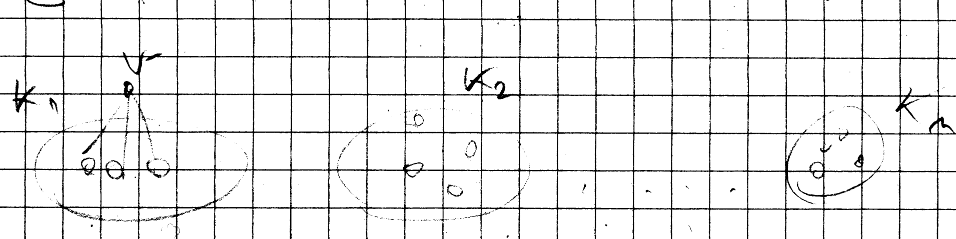
1) $n = 2$



$n = 3$



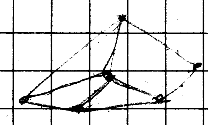
Pretp. da G nije povezan. Postoji čvor u G koji nije povezan sa svim ostalim



1. Koju relaciju možemo uspostaviti između sume stepena čvorova i broja grana nekog grafa?

G, n-čvorova: $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2\mathcal{E}$

$\mathcal{E} = |E(G)|$



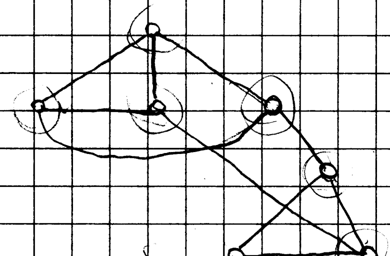
$\mathcal{E} = 9$

$d(v_i) = 3 + 3 + 3 + 2 + 3 + 4 = 18$

2. Koliko grana ima r-regularan graf sa n čvorova?

$\mathcal{E} = \frac{n \cdot r}{2}$

3. 7 prijatelja koji odlaze na odmor dogovore se da će svaki od njih da se javi razglednicom trojici od ostalih 6. Da li je moguće organizovati korespondenciju tako da svako piše onim prijateljima koji će njima pisati?



Suma stepeni mora biti paran broj - ne postoji 3 regularan graf sa 7 čvorova. Suma stepeni je $3 \cdot 7 = 21$ znači moro bi imati 10,5 grana ($\frac{21}{2}$).

DEF. Za dati neusmjereni graf sekvenca stepeni je monotono nerastuća sekvenca stepeni svih čvorova grafa.

DEF: Grafička sekvenca je sekvenca brojeva koji mogu biti sekvence stepeni nekog grafa.

c) $\underline{5}, 5, 5, 4, 2, 1, 1, 1$

$\underline{4}, 4, 3, 1, -, 1, 1$ $\Delta = 5$

$\Delta < \nu$

$\underline{3}, 2, -, -, -, 1$ $\nu = 8$

$1, -$ $\Rightarrow$ ne može

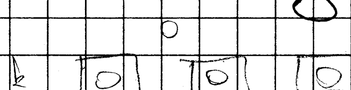
1. Pokazati da u bilo kojoj grupi uvijek postoje 2. sa jednakim brojem prijatelja u okviru te grupe.

Ovdje možemo iskoristiti i primijeniti Dirihleov princip:

Dirihleov princip („pigeonhole principle")

n-golubova, k-kutija, $n > k \Rightarrow \exists$ kutija za više od 1 g

Nakon smještanja svih golubova u kutiji mora se pojaviti u jednoj kutiji više od jednog goluba.



n-ljudi: $v_1, v_2, \ldots v_n$

$d(v_i)$ - broj prijatelja

ako postoji izolovan čvor (δ) ne može biti max stepen $n-1$

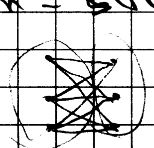
$\left.\begin{array}{l} \Delta = d_{max} = n-1 \\ \delta = d_{min} = 0 \end{array}\right\}$ nije moguće da istovremeno vrijedi

$n-1$ mogućnost za različite stepene (kutije)

n ljudi tj. čvorova (golubovi)

2. Pokazati da, ako k regularan bipartitan graf sa $k > 0$ ima biparticiju (X, Y), onda je kardinalni broj $|X| = |Y|$.

k regularan - svi čvorovi su stepena k

bipartitan - 

$|X| = m$

$|Y| = n$

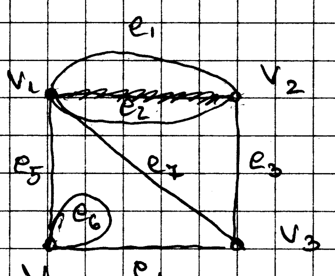
$$\sum_{v_i \in X} d(v_i) = \sum_{v_i \in Y} d(v_i)$$

$$m \cdot k = n \cdot k \Rightarrow m = n$$

MATRICE INCIDENCIJE I SUSJEDSTVA

Svakom grafu G odgovara $\nu \times \varepsilon$ matrica koju zovemo **matrica incidencije grafa G**.
Neka su u grafu G čvorovi $v_1, v_2, \dots, v_\nu$, i grane $e_1, e_2, \dots, e_\varepsilon$, tada je matrica incidencije grafa G matrica $M(G) = [m_{ij}]$ gdje je m_{ij} broj koji predstavlja koliko puta su v_i i e_j incidentni.
čvor je krajnji čvor grane.
Druga matrica pridružena grafu G je **matrica susjedstva**. To je $\nu \times \nu$ matrica $A[G] = [a_{ij}]$ u kojoj a_{ij} predstavlja broj grana čije su krajnje tačke čvorovi v_i i v_j.

1. Formirati matrice incidencije i susjedstva za dati graf.



$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ v_2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$\Sigma = d(v_1)\ d(v_2)\ d(v_3)\ d(v_4)$

2. Koliko je suma svake kolone matrice incidencije je?

2 - svaka grana ima početnu i krajnju tačku (čvor).

3. Suma svake kolone matrice A je?

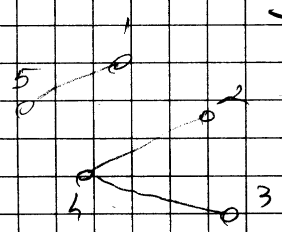
stepen: $\Sigma = d(v_1)\ d(v_2)\ d(v_3)\ d(v_4)$

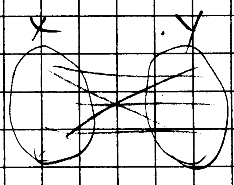
4. Neka je graf G bipartitan, pokažite da čvorovi grafa G mogu biti numerisani tako da matrica A ima sljedeći oblik:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 0 & A_{12} \\ \hline A_{21} & 0 \end{array}\right] \quad \text{gdje je} \quad A_{21} = A_{12}^T.$$

Matrica A je simetrična, ima nule na dijagonali, ali ne samo na dijagonali:

$$\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$





bipartitan graf

Uzmemo redom čvorove:

$v_1, \dots, v_k \in X$

$v_{k+1} \dots v_m \in Y$

NE TREBA

(5) Pokažite da, ako je G jednostavan, karakteristične vrijednosti matrice A (susjedstva) su različite onda je ~~auto G Abe~~ automorfna grupa grafa G Abelova grupa.

6. Pokažite da, ako je G jednostavan onda elementi na dijagonalom matrica MM^T i A^2 predstavljaju stepene čvorova grafa.

$A = [a_{ij}]$ $\quad a_{ij} \in \{0, 1\}$ kod jednostavnog grafa

$a_{ii} = \emptyset$ jer je jednostavan graf, nemamo petlje

$A^2 = [c_{ij}]_{m \times m}$

$$c_{rr} = \sum_{i=1}^{m} a_{ir} \cdot a_{ri} = \sum_{i=1}^{m} a_{ir}$$

$$c_{22} = \sum_{i=1}^{5} a_{i2} a_{2i} = a_{12} a_{21} + a_{22} a_{22} + a_{32} a_{23}$$

A

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{m \times m} \\ 2 \quad 3 \quad 1 \quad 3 \end{array} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{m \times m} = 0+1+0+1+ +1+0+1+1+ +0+1+0+0 +1+1+0+0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{m \times m}$$

M ~~i~~ M^T su kvadratne (treba ih pomnožiti):

$$d_b = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} m_{bi}}_{\text{suma vrste}} \qquad b = \overline{1, m}$$

1. Pokazati da je broj (v_i, v_j) - puteva dužine k u grafu G jednak elementu a_{ij} matrice A^k.
jednostavnom

mat. susjedstva

kada je $k=1$: $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ako } \exists \text{ grana } v_i v_j \\ 0, \text{ u suprotnom} \end{cases}$

n - čvorova

$k=2$: $a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$

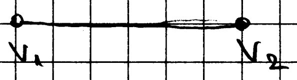
$A^2 = A \cdot A$

$A^k = [a_{ij}^{(k)}]$

$a_{i2} = 1 \land a_{2j} = 1$ $v_i v_2, v_2 v_j$

$a_{ik} = 1 \land a_{kj} = 1 \Leftrightarrow v_i v_k, v_k v_j$ su grane koje postoje (i imaju zajed. čvor v_k)

Dakle a_{ij} predstavlja broj mogućih $v_i v_j$ puteva dužine 2.



$v_1 v_2 v_1$

$A^3 = A \cdot A^2$

$A^5 = A \cdot A^4$

$k=3$ $a_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{kj}^{(2)}$

npr. matrica dužine 5 za svaka 2 čvora, tražili bi matricu A^5

2. Pokazati da ako je G jednostavan i ako je $\delta \geq k$ onda G ima elementarni put dužine k.

δ - minimalni stepen čvora u grafu

$\exists v_1 v_2 \ldots v_{k+1}$ - put, $v_i \neq v_j$, $\forall i,j \in \{1, \ldots, k+1\}$, $i \neq j$

suma stepeni = dvostrukom broju grana

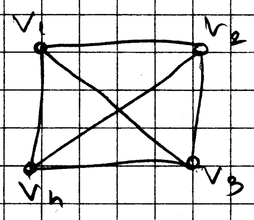
$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{k}{2} \cdot n$$

K_{k+1}

k-regularan: $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = k \cdot n$ čvorova

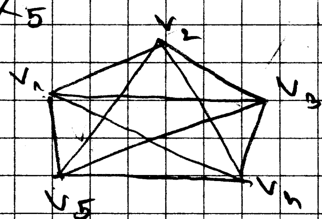
Primjer:

K_4



npr. $v_1 v_3 v_4 v_2$

K_5



$v_2 v_4 v_1 v_3 v_5$

K_{k+1}

$v_1 — v_2$

$v_1 — v_2 — v_3$

put duž.	ostali mogući
1	$k-1$
2	bar $k-2$
3	bar $k-3$
⋮	⋮
$k-1$	bar 1
k	bar 0

3. Pokažite da je G povezan akko za svaku particiju skupa V od 2 nepovezana skupa V_1 i V_2 postoji grana sa jednom krajnjom tačkom u V_1 i drugom u V_2.

$$G\text{-povezan} \iff (\forall V_1, V_2)(V_1 \cup V_2 = V \wedge V_1 \cap V_2 = \emptyset)$$
$$(\exists e = uv) : u \in V_1 \wedge e \in E(G) : v \in V_2$$

G povezan $\Rightarrow$

jer ako ne bi postojala takva grana onda bi V_1 i V_2 bile 2 komponente povezane, graf G ne bi bio povezan

pokušati matematičkom indukcijom $\Leftarrow$

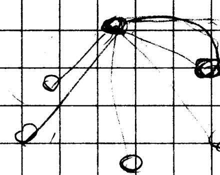
4. a) Pokazati da ako je G jednostavan i $\varepsilon > \binom{\nu-1}{2}$ onda je G povezan

b) Za $\nu > 1$ pronaći nepovezan jednostavan graf sa $\varepsilon = \binom{\nu-1}{2}$.

ν - broj čvorova

ε - broj grana

r-regularan graf sa n čvorova daje $\varepsilon = \frac{n \cdot r}{2}$ grana



$6 = 6$

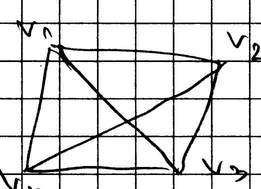
$\binom{\nu-1}{2} = \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$ = 10

$\varepsilon(K_\nu) = \binom{\nu}{2} = \frac{\nu(\nu-1)}{2}$ = 15

$\frac{\nu(\nu-1)}{2} - \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2} = \frac{\nu-1}{2} \cdot 2 = \nu - 1$

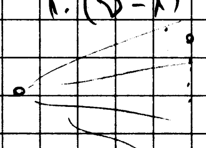
Drugim riječima, dokažimo da oduzimanjem bilo kojih $\nu-2$ grana od kompletnog grafa K_ν uvijek dobivamo povezan graf.

Npr.



ako izostavimo bilo koje 2 grane graf će biti povezan a ako maknemo 3 dobit ćemo izolovan čvor (3. stepena graf)

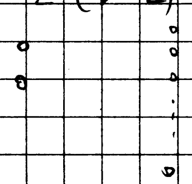
1. $(\nu-1)$

1  $\nu - 1$

$3(\nu-3)$

3 $\nu - 3$

2. $(\nu-2)$

2  $\nu - 2$

$\frac{\nu}{2}$ $\frac{\nu^2}{4}$ $\frac{\nu}{2}$

ZA ISPITU

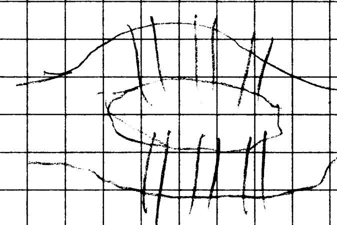
* OJLEROV GRAF *

DEF: Graf je Ojlerov ako posjeduje jednostavan put koji sadrži sve grane grafa.

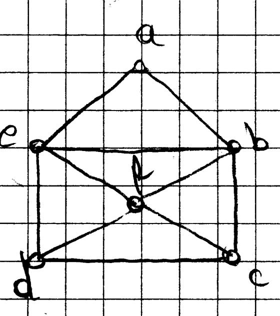
DEF: Ojlerov jednostavan put u grafu je put koji sadrži sve grane grafa.

DEF: Zatvoren Ojlerov jednostavan put zovemo Ojlerova kontura.

Motivacija za graf - mostovi na rijeci



1. Naći Ojlerov ~~graf~~ jednostavan put u sljedećem grafu.

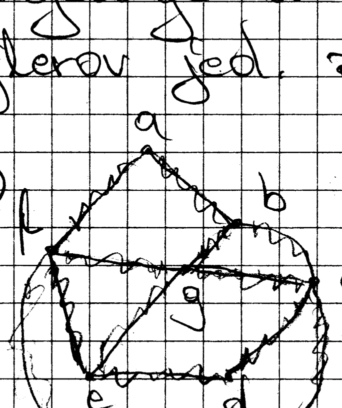


svih 10 grana treba biti obuhvaćeno bez ponavljanja, a čvorovi se mogu ponavljati - jednostavan (a kod elementarnog se čvorovi ne ponavljaju)

Ojlerov jed. put: cbeabfdefcd

2. Da li je dati graf Ojlerov?
Posjeduje li dati graf Ojlerovu konturu i Ojlerov jed. put?

a)



bgfabcgedcfe

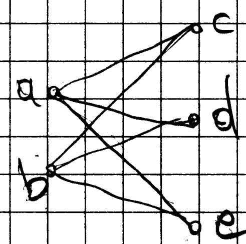
počinje se i završava sa neparnim stepenom

Graf je Ojlerov jer ∃ jed. put.

Nema O. konture jer početna i krajnja tačka nisu iste (a to će se desiti ako nemamo čvorova neparnog stepena)

T: Graf G je Ojlerov ako ima jednu netrivijalnu komponentu i broj čvorova neparnog stepena je 0 ili 2.

b) $K_{2,3}$



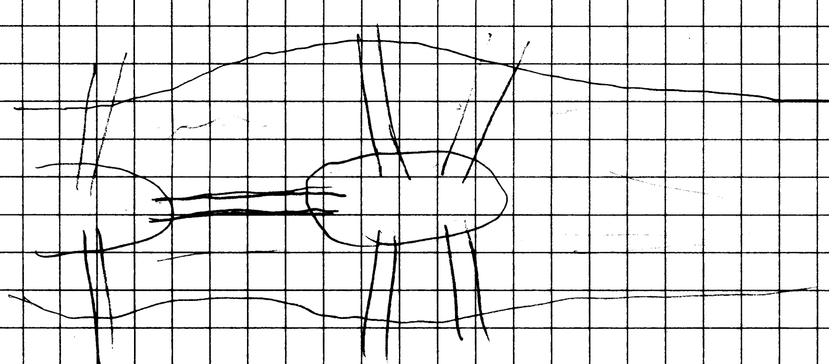
acbdaeb - jednostavan put ⇒ graf je Ojlerov graf

Nema konture

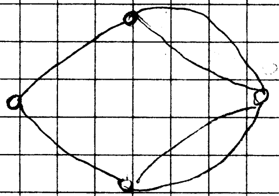
$d(a) = d(b) = 3$
$d(c) = d(d) = d(e) = 2$

Prema prethodnoj T pošto dati graf ima tačno 2 čvora neparnog stepena i samo jednu netrivijalnu komponentu graf je Ojlerov tako da graf posjeduje O. jed. put. Pošto nisu svi stepeni čvorova parni graf ne posjeduje Ojlerovu konturu

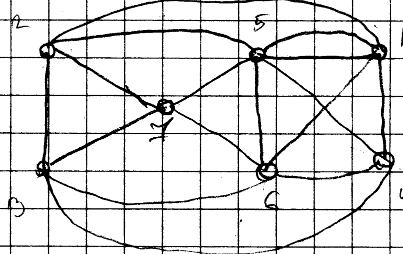
2. Napraviti graf na osnovu date skice:



I mostovi kao grane II posmatramo mostove kao čvorove



3, 3, 3, 5



4, 4, 6, 6, 6, 6

Ojlerov graf sa jed. putom i konturom

Treba nam da obidjemo sve mostove (čvorove) a da se ne ponavljaju.

Zaključak: I graf nije Ojlerov i predstavlja rj. problema tj. da nema rj., a II graf nije rj. problema.

~~3 Kada će~~

3. Za koje m i n $K_{m,n}$ će posjedovati Ojlerovu konturu, a kada će posjedovati Ojlerov put?

$\left.\begin{array}{l} m = 2 \\ n = 2k-1 \end{array}\right\}$ ima Ojlerov put, ali ne i konturu

$\left.\begin{array}{l} m = 2k \\ n = 2l \end{array}\right\} \Rightarrow K_{m,n}$ ima O. konturu (a time i O. put)

$k, l \in \mathbb{N}$

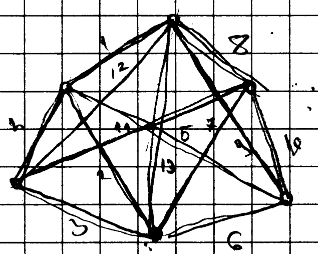
4. Dokazati ili opovrgnuti:

a) Svaki O. bipartitan graf ima paran broj grana.

b) Svaki O. jed. graf sa parnim br. čvorova ima paran broj grana

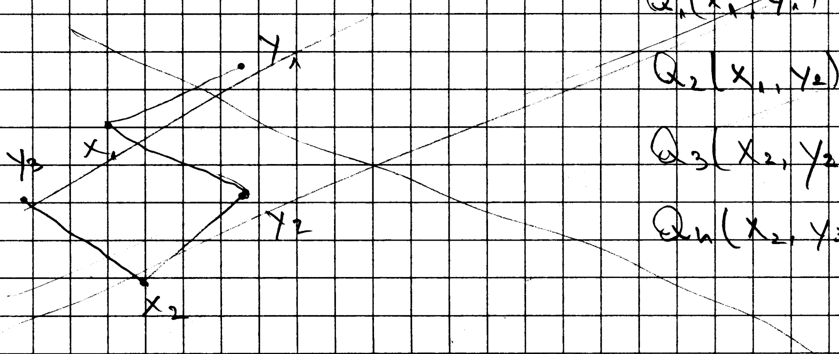
a) $\mathcal{E} = 2\cdot(2k-1)$ $\vee$ $\mathcal{E} = 2k \cdot 2l$ $\Rightarrow$ tvrdnja je tačna

b) Neka je G Ojl. graf sa parnim brojem čvorova



Paran broj čvorova $\not\Rightarrow$ paran br. grana tj. tvrdnja nije tačna.

5. Neka je G graf čiji skup čvorova čine k-torke skupa $\{0,1\}$. Dva vrha x i y grafa G su susjedna akko se odgovarajuće k-torke razlikuju samo u jednoj koordinati. Takve grafove obilježavamo sa Q_k. Nacrtati Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, pa utvrditi da li ovi grafovi posjeduju Ojlerov put ili O. konturu. Poopštiti tvrdnju za Q_k.

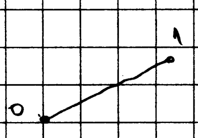


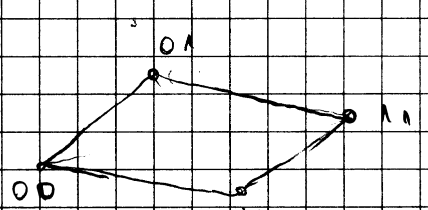
$Q_1(x_1, y_1)$
$Q_2(x_1, y_2)$
$Q_3(x_2, y_2)$
$Q_4(x_2, y_3)$

k-torka skupa $\{0,1\}$

$k = 1$ 0 ili 1 2 čvora

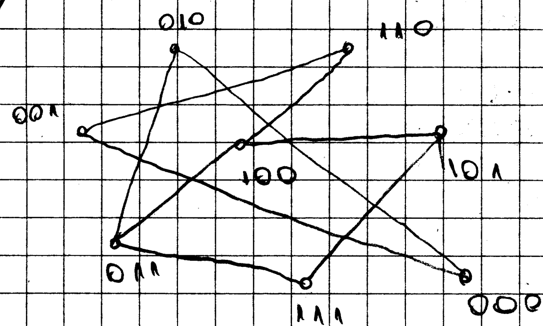
$k = 2$ 00 ili 01 ili 10 ili 11 4 čvora

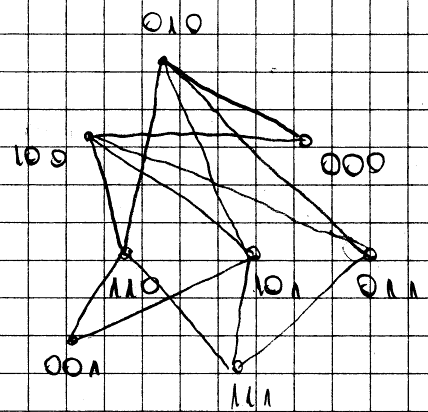


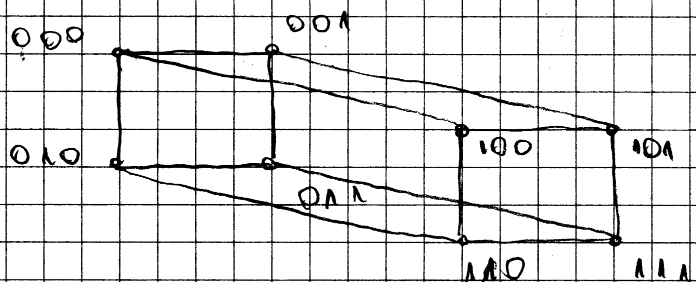


$k=3$ $\quad 2^3$ kombinacija $\Rightarrow$ 8 čvorova

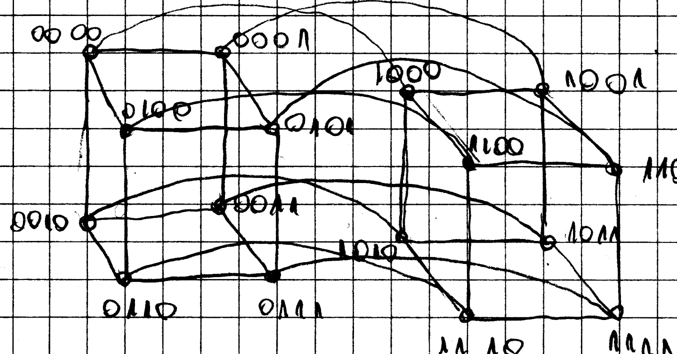
001 010 100 110 101 011 111 000







Q_3



Q_4

	ima O. put	ima O. konturu	
Q_1	DA	NE	(stepeni 1, 1)
Q_2	DA	DA	(stepen 2, 2, 2, 2)
Q_3	NE	NE	(stepen 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)
Q_4	DA	DA	(stepen : 4, 4, 4, . . . 4)
$k=2m$, $m\in\mathbb{N}$	DA	DA	
$k=1$	DA	NE	
$k=2m+1$, $m\in\mathbb{N}$	NE	NE	

1. Na večeri je 7 gostiju i domaćin želi da se svi međusobno rukuju tačno jednom. Domaćin također želi i da se poštuju sljedeća pravila:

a) rukovanja se dešavaju sekvencijalno (neistovremeno i ne više od 2 puta za redom ista osoba)

b) svako rukovanje (osim prvog) treba da uključi nekoga iz prethodnog rukovanja.

Postoji li način da se rukovanja izvrše tako da budu ispoštovana sva postavljena pravila? Šta možete reći u slučaju da je broj gostiju 3, 4, 5, 6 ili 8?

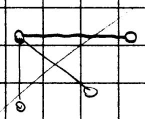
7 gostiju = 7 čvorova

$E = \frac{7 \cdot \cancel{6}^3}{2} = 21$

- k gostiju
- graf sa k čvorova
- stepen svakog čvora je $k-1$ tj. radi se o $(k-1)$-regularnom grafu
- svaka grana predstavlja rukovanje

k - neparno
$k-1$ parno $\Rightarrow$ svi stepeni parni - ima O. put i konturu

k - parno
$k-1$ - neparno $\Rightarrow$ neparni stepeni $\Rightarrow$ nije O. graf



U slučaju da je paran broj gostiju neće moći, a u slučaju da je neparan može.

SL. NA ISPITU

2. Na jednom teniskom terenu našlo se 7 tenisera dogovorilo se da će igrati mečeve singla tako da svaki igrač igra najviše 2 meča zaredom i da svaki naredni meč igra tačno jedan od igrača koji je igrao u meču prije toga. Također su se dogovorili da svaki igrač treba

ukupno da odigraju tačno:

a) 3 meča $\Rightarrow$ regularan graf $\frac{7\cdot 3}{2} = \frac{21}{2}$ ne može

b) 4 meča   4 — " — $\frac{7\cdot 4^2}{2} = 14$ može

S tim da se nikada ne sastanu igrači koji su već imali međusobni duel. Da li je moguće da se ispune svi uslovi iz dogovora; ako jeste nacrtati grafove, ako nije obrazložiti?

ŠUMA. STABLO. PRETRAŽIVANJE GRAFOVA: BFS, DFS

DEF: Aciklični graf (graf bez kontura) nazivamo šuma

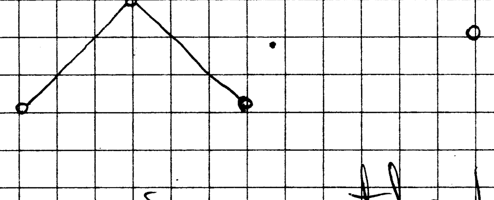
DEF: Povezanu šumu nazivamo stablo.

DEF: Čvorove stepena 1 u stablu nazivamo listove.

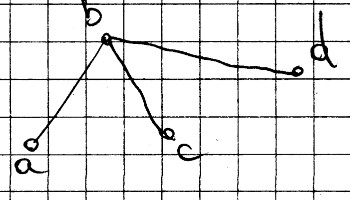
Svako netrivijalno stablo posjeduje list.

0 ili 1 čvor $\Rightarrow$ 0 ili 1 list

1. Nacrtati šumu sa 2 komponente povezanosti tako da u jednoj imamo 3 čvora a u drugoj jedan čvor.



2. Šumu iz prethodnog zad. pretvoriti u stablo dodavanjem jedne grane



možemo spojiti bd ili ad ili cd samo ne ac jer bi dobili konturu pa to ne bi bila šuma

3. Navesti listove u stablu iz zad. 2.

a, c, d

Stav: $\nu > 1$. G je stablo $\Rightarrow \exists v \in V(G) : d(v) = 1$

pretp. da za $(\forall v \in V(G))\ d(v) > 1$ tj. da ne posjeduje listi

ν čvorova

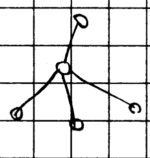
Koliko je ε_{min} (min. broj grana) da bi G bio povezan?

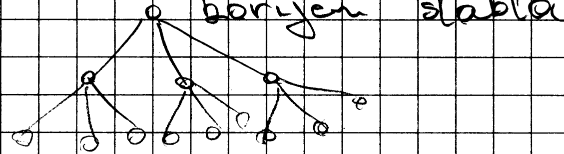
$\varepsilon_{min} = \nu - 1$

Skidamo grane kod nep. br. stepeni $\Rightarrow$ graf sa parim br. stepeni $\Rightarrow$ 0. graf $\Rightarrow$ 0. kontura

Dobijemo konturu $\Rightarrow$ ne može biti stablo $\Rightarrow$ ima stablo sa jednim listom.

4. Pokažite da svako stablo T ima najmanje $\Delta(T)$ listova.



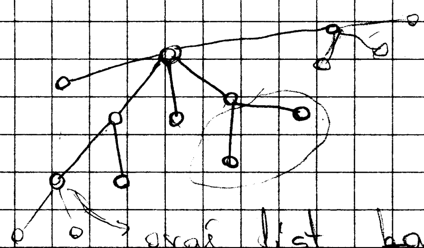


Koristimo princip da neki čvor proglasimo korijen stabla.

Korijen stabla treba imati najviši stepen.

- Uzmimo čvor najvećeg stepena kao korijen stabla. Posmatrajmo jednostavne puteve od korijena stabla preko susjednih čvorova. Svaki od tih puteva mora završiti u jednom listu jer bi u suprotnom imali konturu. Tako da imamo najmanje $\Delta(T)$ različitih puteva koji završavaju u različitim listovima, što znači da imamo najmanje $\Delta(T)$ listova.

5. Pokazati da stablo bez čvorova stepena 2 ima više listova nego ostalih čvorova. Možete li pronaći veoma kratak dokaz ne koristeći mat. indukciju.



što više povećavamo stepen prvog čvora više se razlikuje broj čvorova i broj listova. (se povećava)

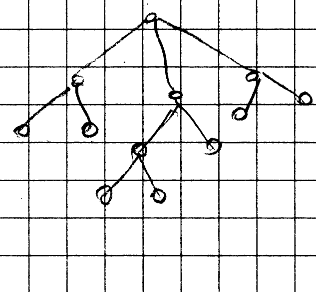
ovaj list kada dodamo još jedan bit će čvor stepena 2 ali ga tretiramo kao bio list pa nije više tu

$n = 1$ o

čvorova (n)	listova (k)		čvorova koji nisu listovi ($n-l$)
1	1	$>$	0
k	l	$>$	$k-l \overset{?}{\Rightarrow}$
$\overset{?}{\Rightarrow}$ $k+1$	$l+1$	$>$	$k+1-(l+1)$
	$l+1$	$>$	$k-l$

k čvorova koji nisu listovi, l listova, $P: k<l$

posmatrajmo stablo sa $k+1$ čvorova koji nisu listovi



$k+2$?

$k<l$, $k+1<l+2$, $k+1<l+1$

ALGORITAM ZA PRETRAŽIVANJE

DFS (Depth-first search) - alg. pretraživanja u dubinu

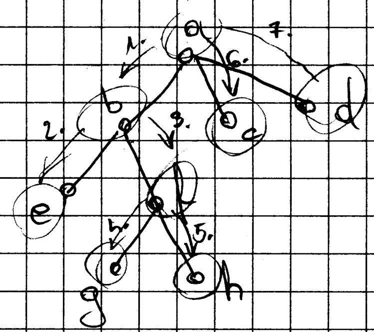
- Pretraživanje u dubinu je način pretraživanja u kome se koristi stek kao struktura podataka u koju ćemo pohranjivati one čvorove grafa koje smo posjetili. Samo pretraživanje započinje od proizvoljnog čvora u grafu kojeg označavamo kao početnog, zatim nastavljamo sa susjednim čvorom koji mora da zadovoljava neki od zadanih kriterija npr. alfabetski red ili brojnu vrijednost.

traženje čvora sa nekom osobinom npr f (provjeravamo susjede)

```
DFS {
    stavi početni čvor na stek;
    sve dok stek nije prazan {
            uzmi čvor sa steka;
            ako je trenutni čvor konačan :
                    rezultat = trenutni čvor;
            ako je trenutni čvor u listi posjećenih:
                    nastavi sa idućim;
            stavi sve susjedne čvorove trenutnog čvora
            koji nisu prethodno posjećeni na stek;
    }
  (rezultat nije pronađen;)
}
```

1. Izvršiti DFS na grafu:

a - početni



stek | uzmi sa steka | lista posjećenih | a

a | t.č. a

stavi proizvoljan čvor u stek
radi dok stek nije prazan
a | ima li susjeda koji nisu posjećeni?

ima

DA → stavi na stek tog susjeda

NE → vadi iz steka

ULAZ: graf G

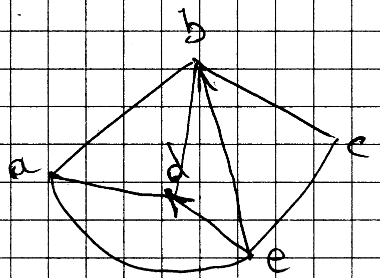
IZLAZ: stablo T (stablo preopterećivanja)

```
DFS{
    STEK ← proizvoljan iz G
    WHILE NOT STEK.EMPTY
    {
        A ← STEK.POP()
        L ← SUSJEDNI_NEPOSJEĆENI(a)
        IF NOT L.EMPTY
            STEK ← L.GET()
                T ← dodaj granu (a, STEK.TOP())
        ELSE
            STEK.POP()
    }
```

a	A: a	bcd	b a				
b a	A: b	e, f	e b a				
e b a	A: e	— lista prazna	b a				
b a	A: b	f	f b a	A: f	g, h	g f b a	h f b a

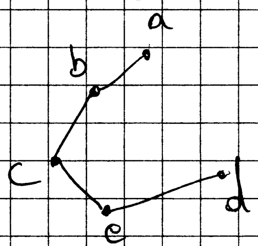
Izlaz je stablo pridruživanja (pokrivajuće stablo).

2.



Na ovaj graf primjeniti DFS moramo naglasiti početni čvor

Izvršiti DFS uzimajući kao početni čvor čvor a!
Izbor susjednog vršimo alfabetski

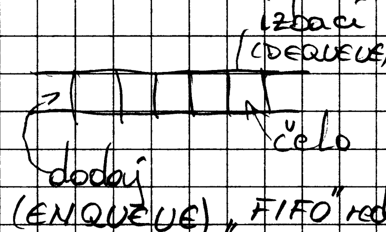


BFS (Breadth first search) ne koristimo stek kao u DFS
(pretraživanje po širini)

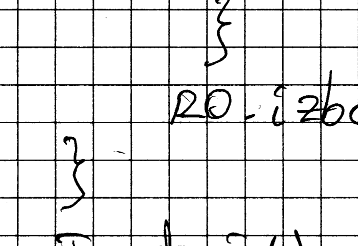
Algoritam:

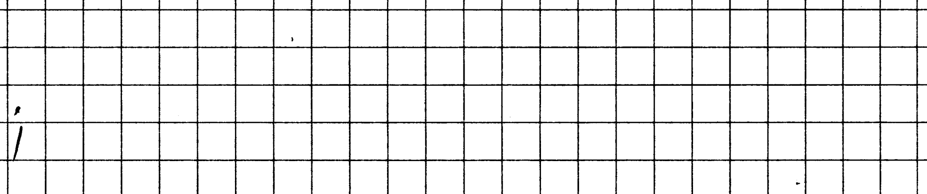
ULAZ: graf G, polazni čvor pretrage S
IZLAZ: stablo pretraživanja T

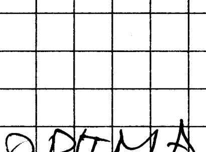
```
BFS (G, S) {
    RO.dodaj (S);
    Dok je RO.neprazan () radi {
        RS ← DajRedSusjednihKojiNisuUStablu (G, RO.dajČelni (), T);
        Dok je RS.neprazan () radi {
            T.dodajGranu (RO.dajČelni (), RS.dajČelni ());
            RO.dodaj (RS.dajČelni ());
            RS.izbaci ();
        }
        RO.izbaci ();
    }
    T.crtaj ();
}
// KRAJ ALGORITMA
// RO - red otkrivenih čvorova
// RS - red susjednih čvorova
```



1. Izvršiti BFS na grafu

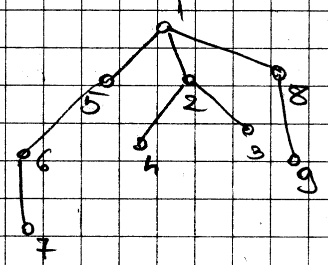






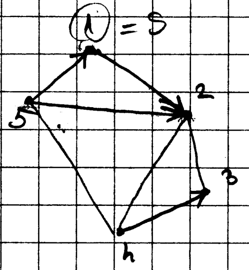
ubaci izbaci

| 8 | 5 | 2 | | 7 | 9 | 6 | 4 | 3 | 8 | 5 |



radi sa 9 pa nema místa pa izbaci

2.



1 je početni čvor

RO

| 1 | | 2 | ~~1~~ |

RS

| 2 | | |

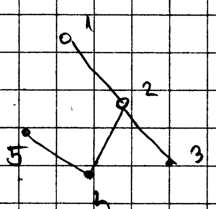
izbacimo 1 tražimo 2 susjeda tj. 2 je čeoni

| 2 | | 3 | 2 | | 4 | 3 | 2 |

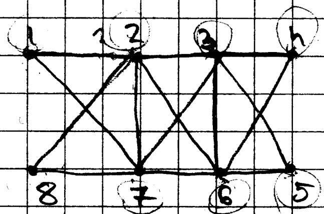
| 3 | 3 | | 4 | | |

| 5 | ~~4~~ |

susjedni od 5 su svi otkriveni i to je kraj



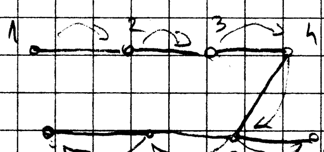
3.



a) Izvršiti DFS i BFS za S=1

b) Izvršiti DFS i BFS za S=6

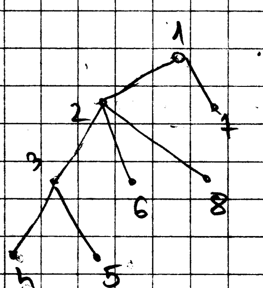
a)



DFS

biramo manjeg susjeda

dođemo u 5 - nema susjednih vraćamo se u 6

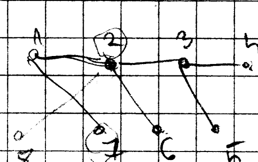


| 1 | | 2 | 1 |

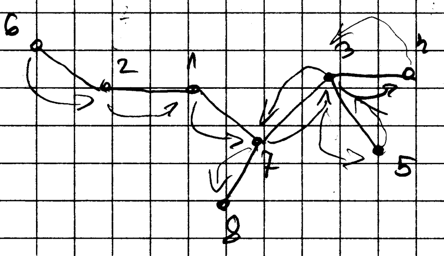
| 7 | 2 |

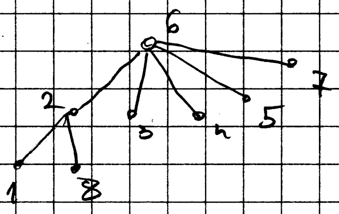
biramo sve susjede

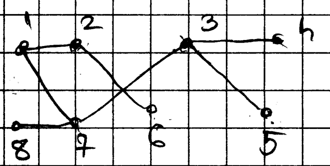
BFS

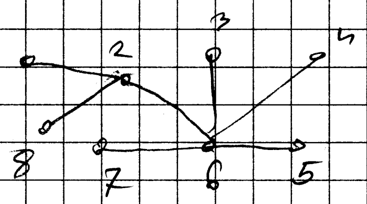


b) $S=6$ DFS BFS









MINIMALNO POKRIVAJUĆE STABLO

T1/ Za neki povezan graf G sa $G=(V,E)$ V grana i E čvoreva vrijede slijedeće 2 tvrdnje:

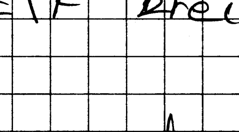
1) $T=(V,E_T)$ je pokrivajuće stablo za G $\Leftrightarrow$ T je aciklican (bez kontura) i maksimalan za tu osobinu (dodavajući neku granu $e \in E \setminus E_T$ kreiramo jedinstvenu konturu $G_T(e)$ u $T+e$) $G_T(e)$ je kontura dobijena dodavanjem grane e u stablo T

2) $K=(V,F)$ je kostablo stabla T u grafu G $\Leftrightarrow$ K ne sadrži ni jedan presjek grafa G i maximalan je za tu osobinu (dodavajući jednu granu $e \in E \setminus F$ kreiramo jedinstven presjek u $K+e$)

Presjek je skup svih grana koje su incidentne sa odabranim čvorovima grafa.

presjek grafa generisan čvorovima 8 i 7 iz pr. 3:

$G \cap \{7,8\} =$



sve susjedne grane posmatranih čvorova

T2/ Neka je $T=(V,E_T)$ jedno pokrivajuće stablo povezanog grafa $G=(V,E)$ i $K=(V,F)$ pridruženo kostablo stablu T i $c: E \to R$ realna f-ja koja svakoj grani grafa G pridružuje jednu realnu vrijednost. Sljedeće osobine su ekvivalentne:

1) $T=(V,E_T)$ je minimalno pokrivajuće stablo za G

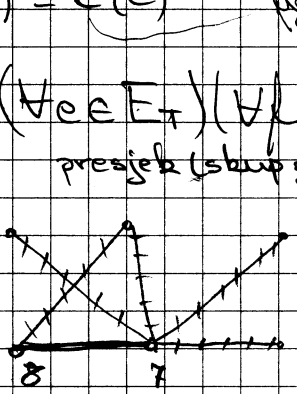
2) za $(\forall e \in E \setminus E_T)$ i $(\forall f \in C_T(e))$ imamo da je:

$c(f) \leq c(e)$ f-ja težine (težinska f-ja)

3) za $(\forall e \in E_T)(\forall f \in W_K(e))$ imamo da je $c(f) \geq c(e)$

presjek (skup grana susjednih sa granom e koje su u kostablu K)

W_k

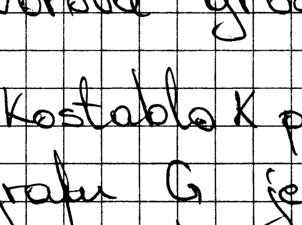


posmatramo granu 8-7 i sve grane susjedne sa čvorovima 8 ili 7 - presjek grafa

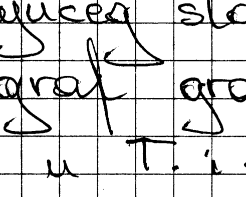
DEF: Pokrivajuće stablo povezanog neusmjerenog grafa G je stablo T čiji je skup čvorova jednak skupu čvorova grafa G.

DEF: Kostablo K pokrivajućeg stabla T u povezanom grafu G je podgraf grafa G koji sadrži sve grane koje nisu u T. i sve čvorove iz G

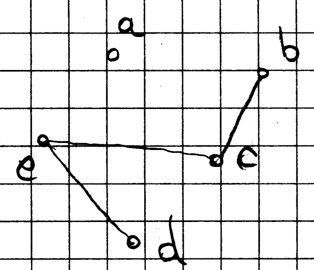
Pokrivajuće stablo T (BFS, DFS)
(za neusmjerene grafove)



graf G



Podgraf sadrži sve čvorove i neke grane polaznog grafa.



kostablo je ono što ostane kada oduzmemo stablo; u ovom slučaju kostablo nije stablo jer ne sadrži čvor a (mora sadržavati sve da bi bio stablo)

KRUSKALOV ALGORITAM

1) Sortirati E da dobijemo listu $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ tako da je $c(e_i) \le c(e_{i+1})$, $\forall i \in \overline{1, m-1}$

$e_1 \le e_2 \le e_3 \ldots$

2) Konstruisati niz: $T_1 = \emptyset$, $T_{i+1} = T_i \cup \{e_k\}$, gdje je $k = \min\{j;\ T_i + e_j \text{ je aciklične}\}$

grana sa najmanjim indeksom (težinom) tako da ne formira konturu

(V, T_n) je min. pokrivajuće stablo.

PRIMOV ALGORITAM

Konstruisati rekurzivno 2 podniza: $T_1 = \emptyset$, $S_1 = \{x_1\}$; $T_{i+1} = T_i \cup \{e\}$, $S_{i+1} = S_i \cup \{x_{i+1}\}$ gdje je $e = (x_i, x_{i+1})$ grana najmanje težine u presjeku $\omega(S_i)$ i dobijemo da je

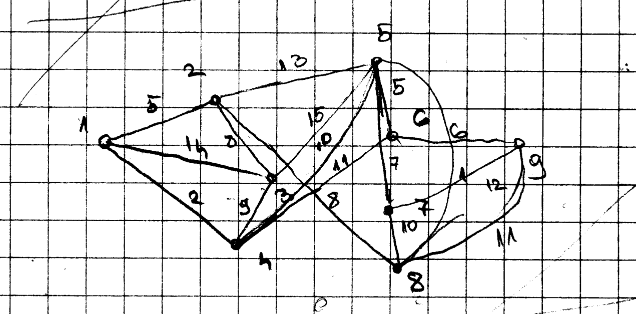
skup čvorova

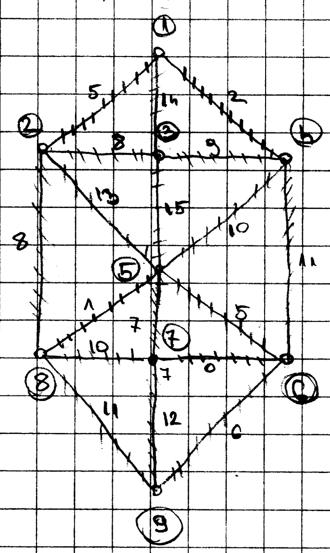
$(S_n, T_n) = (V, T_n)$ minimalno pokrivajuće stablo

1. Servisni tim za postavljanje kablova za kablovsku televiziju ima sljedeći zadatak: postaviti kablove tako da se poveže 9 lokacija tako da troškovi budu minimalni. Troškovi za moguća povezivanja dati su tabelom:

povezivanje	cijena
$L_1 - L_2$	5
$L_1 - L_3$	14
$L_1 - L_4$	2
$L_2 - L_3$	8
$L_2 - L_5$	13
$L_2 - L_8$	8
$L_3 - L_4$	9
$L_3 - L_5$	15
$L_4 - L_5$	10
$L_4 - L_6$	11
$L_5 - L_6$	5
$L_5 - L_7$	7
$L_5 - L_8$	1
$L_6 - L_7$	0
$L_6 - L_9$	6
$L_7 - L_8$	10
$L_7 - L_9$	12
$L_8 - L_9$	11

Naći optimalno rješenje
a) Kruskalovim alg.
b) Primovim alg.



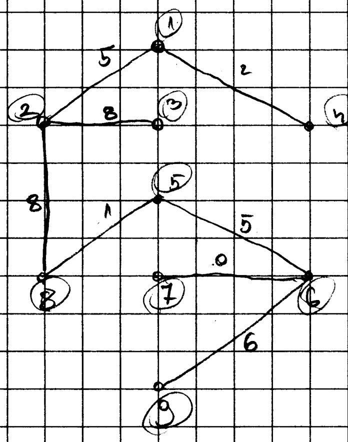


prvo nacrtamo graf pa pravimo listu od najmanje grane do najveće

grana 67 je najmanja pa od nje krećemo

✓	67	0	46	11
✓	58	1	89	11
✓	14	2	79	12
✓	12	5	25	13
✓	56	5	13	14
✓	69	6	35	15
	~~57~~	~~7~~		
✓	28	8		
✓	23	8		
	34	9		
	45	10		
	78	10		

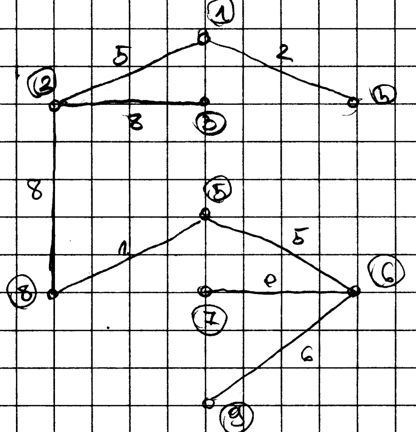
dalje ne gledamo jer smo obišli sve čvorove sada crtamo prema grafu:



$\sum_T c_i = 35$

ovakvo rj ne mora biti jedinstveno jer možemo imati graf sa granama iste težine pa imamo više rj.

b)



U Primovom alg. uvijek biramo jedan čvor iz prethodne grane.
Prvo biramo čvor npr. $S_1 = 1$, pa onda uzimamo najmanji susjedni čvor:

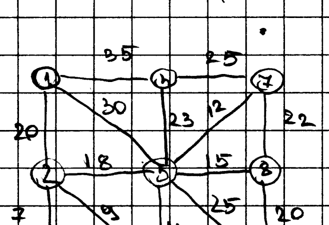
$\min\{C(12), C(13), C(14)\} = C(14)$

$S_2 = \{1, 4\}$ sada biramo od 5 susjeda sa 1 i 4 onaj najmanji:

$S_3 = \{1, 2, 4\}$

pa sa 2 imamo susjede 3 i 8 težine 8 pa biramo npr. 3 pa 8
$\Rightarrow$ 5, 6, 7, 9

2. Naći min. pokr. stablo koristeći K. i P alg.



ELEMENTARNI PUTEVI U MREŽAMA

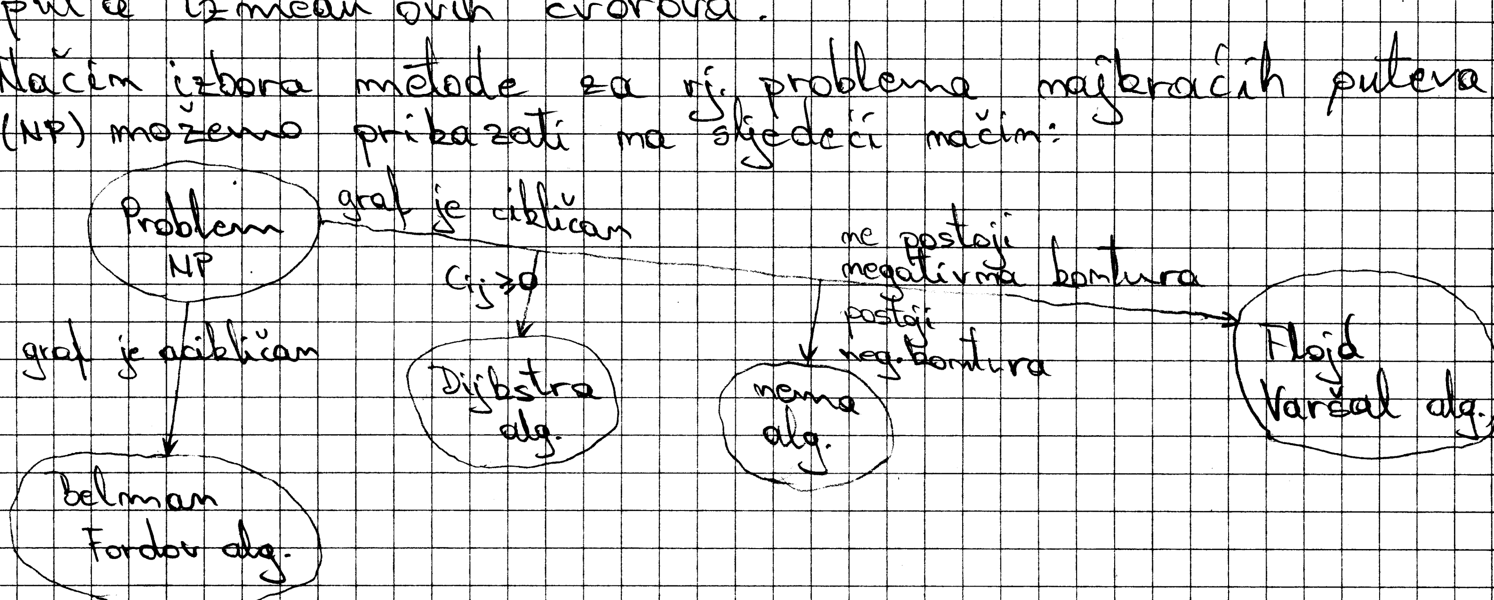
Posmatramo težinske grafove (mreže).
Broj c_{ij} pridružen grani (i,j) zovemo dužina grane (i,j). Dužinu puta između dva čvora definišemo kao zbir dužina grana koje obrazuju taj put. Ako se početni i završni čvorovi puta poklapaju onda se dobija kontura, pa navedena definicija važi i za dužinu konture.

TEOREMA: Da bi u nekoj mreži postojao najkraći put između bilo koja 2 čvora, potrebno je i dovoljno, da je ta mreža konačna i povezana i da ne sadrži ni jednu konturu negativne dužine, gdje se pod pojmom konture podrazumijeva i lupa, kontura dužine 1.

POSLJEDICA: Najkraći put u mreži je istovremeno i elementarni.

TEOREMA: Ako najkraći put P_{st}, između 2 čvora s i t neke mreže, prolazi kroz čvorove i i j, onda je dužina tog puta između i i j jednaka dužini najkraćeg puta između ovih čvorova.

Način izbora metode za rj. problema najkraćih puteva (NP) možemo prikazati na sljedeći način:



* Određivanje najkraćeg puta između 2 zadata čvora *

u mreži

* Algoritam Dijkstra (alg. obilježavanja):

graf ima konturu $c_{ij} \geq 0$

(kontura je pozitivna)

```
begin
    S:={s};
    T:={V-{s}};
    d(s):=0;
    (∀j)(j≠s) d(j):=∞;
    UPDATE(s);
    while S≠V do begin
        d(i):=min{d(j):j∈T};
        S:=S∪{i};
        T:=T-{i};
        UPDATE(i);
    end;
end;
```

V je skup svih čvorova posmatranog grafa.

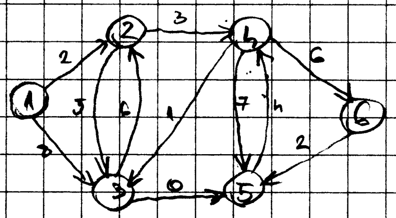
S je ~~traj~~ skup trajno obilježenih čvorova.

T je skup privremeno obilježenih čvorova.

d(k) predstavlja izračunatu udaljenost čvora k od početnog čvora s.

UPDATE(i) mijenja oznake privremeno obilježenih čvorova j susjednih trajno obilježenom čvoru i samo ako vrijedi $d(i)+c_{ij} < d(j)$; tada računamo $d(j):=d(i)+c_{ij}$, te kraj čvora j na grafu stavljamo oznaku: $i, d(j)$ tako se zna iz kojeg smo čvora došli u označeni čvor i koja je posljednja najkraća udaljenost.

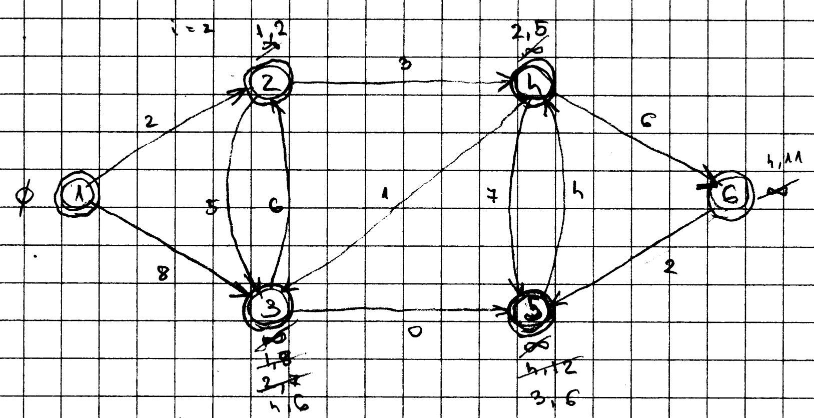
1.



ciklični graf

Riješiti problem najkraćih puteva od čvora ① do svih ostalih čvorova u grafu.

u 1. koraku ① ide do ① ⇒ ∅, a ostali ∞



$d(i)+c_{ij}<d(j)$

$d(j):=d(i)+c_{ij}$

- u drugom koraku ② postaje trajno obilježen $i=2$
- sljedeći korak susjedni čvorovi čvora ② privremenih oznaka mijenjamo ako je manji put (5<∞ pa mijenjamo)

④ trajno obilježavamo pa ③ pa ⑤ pa UPDATE ništa ne radi, (jer ne možemo iz 5 doći u 6) pa je trivijalno kao ostane 1 čvor ⇒ ⑥ dobija trajnu oznaku

npr. najkraći put od 1 do 4: 124

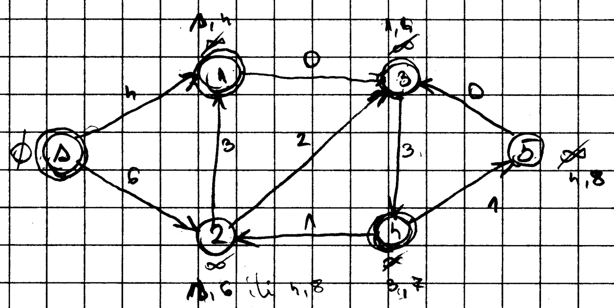
od 1 do 5: 12435

od 1 do 6: 1246

od 1 do 3: 1243

od 1 do 2: 12

2. Odrediti najkraći put od čvora s do svih ostalih čvorova



od s do 1: s1

od s do 2: s2

od s do 3: s13

od s do 4: s,1,3,4

od s do 5: s,1,3,4,5

Belman-Fordov algoritam

graf nema konturu

Koraci:

1° Napravimo topološki redoslijed čvorova datog grafa;

2° Stavimo za čvor x_1 $d(x_1)=\emptyset$ a za sve ostale čvorove x datog grafa $d(x)=\infty$;

3° $i:=1$;

4° Ako je $i \leq$ broju čvorova radi korak 5°, u suprotnom idi na kraj;

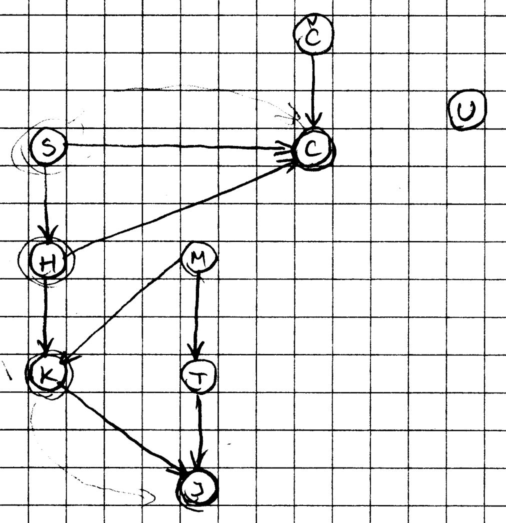
5° Za čvor x_i promijeni oznaku udaljenosti prema formuli $d(x_i)=\min(d(y)+c(y,x_i))$ gdje $y \in N(x_i)+\{x_i\}$; zatim $i:=i+1$ idi na korak 4°

6° KRAJ;

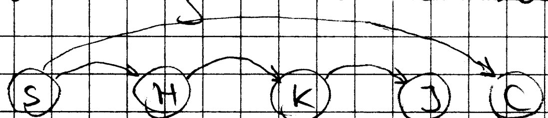
$N(x_i)$ daje skup susjednih čvorova tj. čvorova iz kojih vodi jedna grana u x_i.

Topološko sortiranje usmjerenog acikličnog grafa

G=(V,E) je linearno raspoređivanje svih njegovih čvorova tako da ako graf G sadrži vezu (u,v) [granu] onda se u nizu čvor u javlja prije čvora v. Ukoliko graf nije usmjeren topološko sortiranje nije moguće. Za topološko sortiranje se može koristiti DFS alg.



prvi s kojim smo završili je C i ide na kraj.

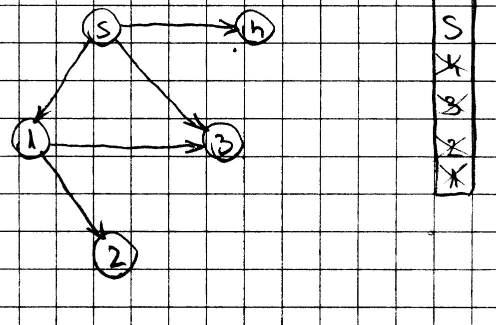


popraviti DFS alg. da dobijemo elegantnije rješenje

do ostalih čvorova ne možemo doći i oni su ∞

(top. redoslijed za čvor S)

za čvor U ne bi imali mjesta



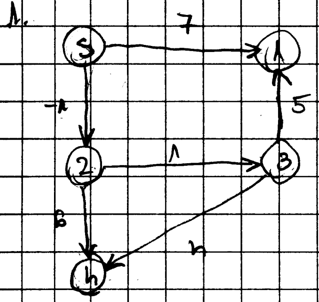
završni:

2 3 1 h S

Topološki redoslijed:

S h 1 3 2

1.

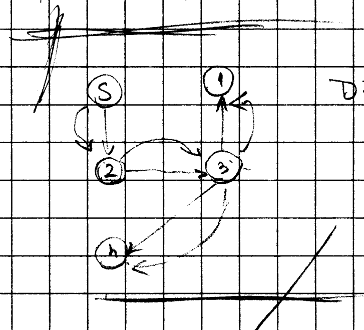


Naći najkraći put od čvora s pa do ostalih čvorova koristeći Belman-Fordov alg.

~~1~~
~~3~~
~~2~~
~~4~~
S

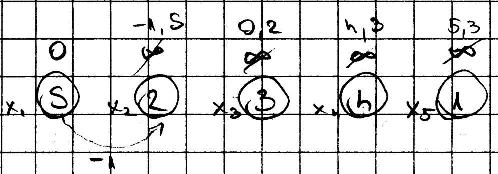
po abecedi

sa 1, sa 4, sa 3, sa 2, sa S završio



DFS

DFS



i=1 posmatramo 1. čvor (s)

i≤5 (radi dok i nije 6)

u x_1 ne dolazi se ni iz jednog čvora pa nema šta raditi i uvećava i:

i=2 pa provjeramo čvor 2; u čvor 2 možemo doći iz S

u 3 dolazimo iz 2 (i=3)

(i=4 u 4 dolazimo iz 2 i 3 pa koji je manji)

$\begin{pmatrix} 4,3 \\ 5,2 \end{pmatrix}$ min $\begin{pmatrix} 7,S \\ 5,3 \end{pmatrix}$

NA ISPITU ovaj i još jedan alg.

Floyd-Warshall-ov algoritam

ima konturu (pozitivnu)

* ~~Početna operacija~~ (k = ∅):

- formiranje matrice susjedstva C^0 — susjedstvo se gleda po težini grane

* ~~Iterativni koraci~~ $(k = k+1)$:

1) određivanje najkraćih puteva: se sastoji u:

- odrediti skupove čvorova I i J tako da čvorovi i za koje je $c_{ik} \neq \infty$, $i \neq k$ čine skup I a čvorove j za koje je $c_{kj} \neq \infty$, $j \neq k$ čine skup J;

2) za $(\forall i \in I)(\forall j \in J)$ odrediti $c_{ij}^{k} = \min\{c_{ij}^{k-1}, c_{ik}^{k-1} + c_{kj}^{k-1}\}$

3) Završna operacija: na dijagonali ne smije biti negativan br.

- ako postoji ciklus onda postoji negativna kontura pa problem nema rješenja
- STOP

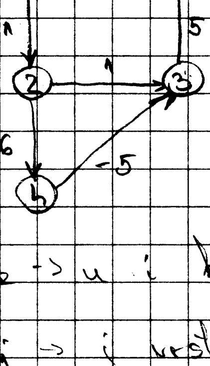
[illegible]

$k = m \Rightarrow C^k$ traženo rješenje

STOP

inače, vrati se na iterativne korake

1. Naći najkraću udaljenost između bilo koja dva čvora u datom grafu.



ako nam se ovo pojavi ide 3 ovdje

$$C^0 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & -4 \\ \infty & 0 & 1 & 6 & \infty \\ 5 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & -1 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

od 1 do 5 možemo doći za težinu -4; tamo gdje ne možemo doći ide ∞

$c_{ik} \rightarrow$ u i koloni tražimo čvorove različite od ∞ i $i \neq k$

$c_{kj} \rightarrow j$ vrsta

(interesuje nas indeks - pa indeks od 5 je 3)

$\Rightarrow I = \{3\},\ J = \{5\}$

najkraći put između 3 i 5 je ∞ pa preko iteracije tražimo neki drugi čvor preko kojeg ćemo naći put između 3 i 5

$\boxed{C^1_{35}} = \min\{C^0_{35}, C^0_{31} + C^0_{15}\} = \min\{\infty, 5-4\} = \boxed{1}$ — desila se promjena

1. iteracija

$$C^1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & \infty & \infty & \infty & -4 \\ \infty & 0 & 1 & 6 & \infty \\ 5 & \infty & 0 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & -1 & \infty & \infty & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$I = \{5\} \quad J = \{3, 4\}$ imat ćemo 2 promjene i 2 min.

$\boxed{C^2_{53}} = \min\{\infty, -1+1\} = \boxed{0}$

$\boxed{C^2_{54}} = \min\{C^1_{54}, C^1_{52} + C^1_{24}\} = \min\{\infty, -1+6\} = 5$

2. iteracija

~~dovršiti~~ !

$$C^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & \infty & \infty & \infty & -4 \\ \infty & 0 & 1 & 6 & \infty \\ 5 & \infty & 0 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & -1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

imamo koliko čvorova toliko i iteracija

~~$i = 3 \quad j = 3$~~

$I = \{2, 4, 5\}$ $\quad \boxed{C^3_{21} = 6}, \boxed{C^3_{25} = 2} \quad \boxed{C^3_{41} = 0} \quad \boxed{C_{45} = -4} \quad C^3_{55} = 0$

$J = \{1, 5\}$

$C_{45} = \min\{\infty, -5$

$$C^3 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & \infty & \infty & \infty & -4 \\ 6 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 5 & \infty & 0 & \infty & 1 \\ 0 & \infty & -5 & 0 & -4 \\ 5 & -1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$i=4,\ j=4$

$I=\{2,5\},\ J=\{1,3,5\}$

$C^4_{21}=6$

$C^4_{23}=1$

$C^4_{25}=2$

$C^4_{51}=5$

$C^4_{53}=0$

$C^4_{55}=0$

$$C^4=C^3=\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & \infty & \infty & \infty & -4 \\ 2 & 6 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 0 & \infty & 1 \\ 4 & 0 & \infty & -5 & 0 & -4 \\ 5 & 5 & -1 & 0 & 5 & 0 \end{array}$$

$i=5\quad j=5$

$I=\{1,2,3,4\},\quad J=\{1,2,3,4\}$

$C^5_{11}=0$

$\boxed{C^5_{12}}=\min\{\infty,-4-1\}=\boxed{-5}$

$\boxed{C^5_{13}=-4}$

$\boxed{C^5_{14}=1}$

$C^5_{21}=6$

$C^5_{22}=0$

$C^5_{23}=1$

$C^5_{24}=6$

$C^5_{31}=5$

$\boxed{C^5_{32}=0}$

$C^5_{33}=0$

$\boxed{C^5_{34}=6}$

$C^5_{41}=0$

$\boxed{C^5_{42}=-5}$

$C^5_{43}=-5$

$C^5_{44}=\min\{0,-4+5\}=0$

$$C^5=\begin{bmatrix} 0 & -5 & -4 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & -4 \\ 5 & -1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}\quad -10\ \ 5\ \ 5\ \ 0\ \ 6$$

matrica C^5 nam govori koje je težine najmanji put od nekog čvora do nekog čvora a put ne možemo pročitati iz matrice

Može doći dokazivanje povezanosti grafa, realni problemi, max broj grana ne može biti bipartitan graf (nešto takvo)

susjedmštvo
povezanost } razlike

Ojlerov graf
bipartitni grafovi